Universidad Simón Bolívar
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas

Nombre: ____________________________________

Carné: __________ Sección: _____

Matemáticas VI (MA-2113) **Bloque A** Abril-Julio 2012 2^{do} Examen Parcial (50 %)

El examen tiene una duración de 1 hora y 50 minutos.

1. (12 puntos) Sea C la circunferencia de ecuación $|z| = R$ (con $R > 0$) orientada de forma antihoraria y sea $f(z)$ una función (compleja) que cumple

$$f(z_0) = \int_C \frac{g(z)}{(z - z_0)^5}\,\mathrm{d}z,$$

siendo $g(z)$ cierta función entera y $z_0 \in \mathbb{C}$. Sabiendo que la serie de Taylor (centrada en cero) de $g(z)$ es $z^5 + 3z^2 + z + 1$, calcule el valor de $f(z_0)$ en cada uno de los siguientes casos:

   (a) $|z_0| < R$.

   (b) $|z_0| > R$.

2. (12 puntos) Calcule el valor de la integral

$$\int_0^\infty \frac{\cos(2x)}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x.$$

3. (12 puntos) Calcule el residuo en $z = 0$ de las siguientes funciones:

   (a) $f(z) = \dfrac{e^z - z - 1}{(\operatorname{sen} z)\,(1 - \cos(2z))}$.

   (b) $g(z) = \dfrac{\operatorname{senh} z}{\operatorname{sen}(\pi z)}$.

   (c) $h(z) = \dfrac{e^{2z} - 2ie^z + 1}{-2e^z\,(i - \cosh z)}$.

4. (14 puntos) Sea $f(z) = \dfrac{\operatorname{sen}\left(\pi - \frac{1}{z}\right)}{\left(\pi - \frac{1}{z}\right)^2}$.

   (a) Halle y clasifique (todas) las singularidades de f.

   (b) Calcule $\displaystyle\int_C f(z)\,\mathrm{d}z$, siendo C la curva de ecuación $|z| = 1$ orientada de forma antihoraria.

¡Justifique Todas Sus Respuestas!